Método Axiomático e Teorias Formais

#06

Introdução

Somente a lógica proposicional não dá conta de expressar aquelas sentenças que fazem uso das noções de “todos” e “alguns”.

Ex.: Para todo x, $x + 0 = x$.

- $(\forall x)P(x)$
- $(\exists x)P(x)$

Linguagem de 1ª Ordem

Uma linguagem de 1ª ordem possui os seguintes símbolos:

a) Conectivos proposicionais $\neg$ e $\rightarrow$; quantificador universal $\forall$;
b) Símbolos auxiliares:), (, ,
c) Uma coleção enumerável de variáveis individuais $x_1, x_2, \ldots$
d) Um conjunto finito ou enumerável (possivelmente vazio) de constantes individuais $a_1, a_2, \ldots$
e) Um conjunto não vazio de letras predicativas $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_2^1, A_2^2, \ldots$
f) Um conjunto finito ou enumerável (possivelmente vazio) de letras funcionais $f_1^1, f_1^2, \ldots, f_2^1, f_2^2, \ldots$

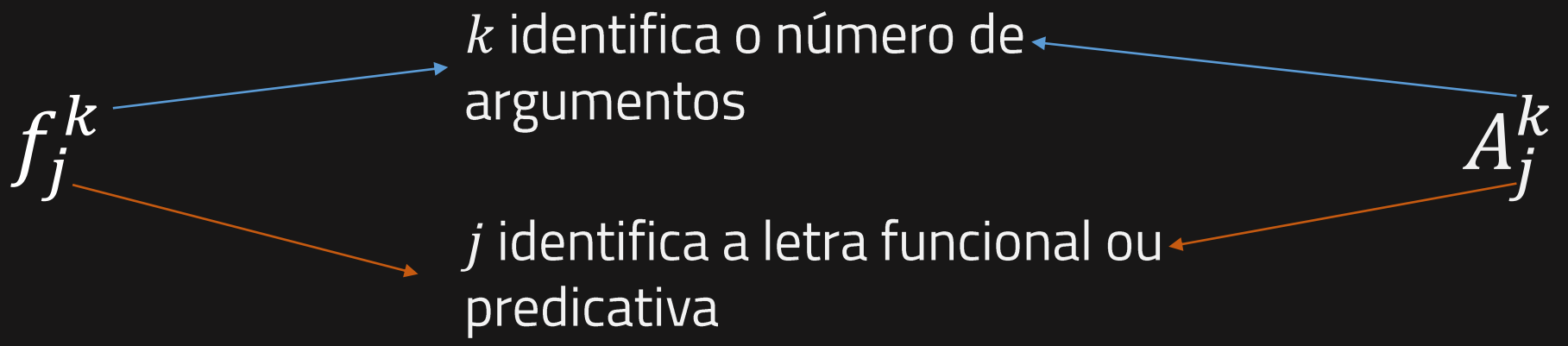
Observações

1 – Os demais conectivos lógicos $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ podem ser definidos da mesma forma que fizemos na lógica proposicional

2 – O quantificador existencial pode ser definido assim:
$(\exists x)P =_{def} \neg((\forall x)\neg P))$

3 – Letras funcionais atuam como operadores (funções). Ex.:
$x_1 + x_2$ pode ser escrito formalmente como $f_1^2(x_1, x_2)$

Observações



4 – Letras predicativas atuam como relações.
Ex.: $x_1 = x_2$ pode ser escrito formalmente como $A_1^2(x_1, x_2)$

Interpretação

Uma interpretação de uma linguagem de 1ª ordem consiste de:
1 – Um domínio D de interpretação.
2 – Para cada letra predicativa A_j^n, atribuímos como seu significado uma relação n-ária.
3 – Para cada letra funcional f_j^n, atribuímos como seu significado uma operação n-ária.
4 – Para cada constante individual a_j atribuímos como seu significado um elemento do domínio D.
Além disso, Variáveis assuem valores em D, os conectivos lógicos e quantificadores permanecem com seus significados usuais.

Exemplo

Uma linguagem para a aritmética:

1 – conectivos $\neg, \rightarrow,$ quantificador $\forall$
2 – símbolos auxiliares
3 – constante individual: a_1
4 – variáveis individuais: $x_1, x_2, \ldots$
5 – letra predicativa: A_1^2
6 – letras funcionais: f_1^2, f_2^2

Uma interpretação:

$D = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$

$x_1, x_2, \ldots$ assumem valores em $\mathbb{N}$

a_1 significa 0 (zero)

A_1^2 significa " $=$ "

f_1^2 significa " $+$ "

f_2^2 significa " $*$ "

Exemplo 1

Uma sentença dessa linguagem seria, por exemplo:

$$A_1^2\left(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2)\right).$$

Qual seria sua interpretação?

$f_1^2(x_1, x_2)$ significa $x_1 + x_2$
$f_2^2(x_1, x_2)$ significa $x_1 * x_2$
A_1^2 significa igualdade

Portanto, a intepretação da sentença acima é $x_1 + x_2 = x_1 * x_2$.

Exemplo 2

Uma outra sentença dessa linguagem seria, por exemplo:

$$(\forall x_1)A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1)) \, .$$

Qual seria sua interpretação?

a_1 significa zero

$f_1^2(x_1, a_1)$ significa, portanto, $x_1 + 0$

A_1^2 significa igualdade

Portanto, a intepretação da sentença acima é $(\forall x_1)(x_1 + 0 = x_1)$.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br